National Center
for Curriculum Development

الرياضيات

الصف الحادي عشر - الفرع العلمي

الفصل الدراسي الأول

11

فريق التأليف

د. عمر محمد أبوغليون (رئيسًا)

هبه ماهر التميمي يوسف سليمان جرادات مهند إبراهيم العسود

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

06-5376262 / 237 06-5376266 P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor feedback@nccd.gov.jo www.nccd.gov.jo

قـرّرت وزارة التربيـة والتعليـم تدريـس هذا الكتـاب في مدارس المملكـة الأردنية الهاشـمية جميعها، بنـاءً على قـرار المجلس الأعلى للمركـز الوطنـي لتطويـر المناهج في جلسـته رقم (2021/3)، تاريـخ 2021/6/10 م، وقرار مجلـس التربية والتعليم رقـم (2021/114) تاريـخ 2021/6/30 م بـدءًا من العام الـدراسي 2021 / 2022 م.

- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan
- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

ISBN: 978 - 9923 - 41 - 363 - 0

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(2022/4/2054)

375.001

الأردن. المركز الوطني لتطوير المناهج

الرياضيـات: الصـف الحـادي عشـر – الفـرع العلمـي: كتـاب التماريـن (الفصـل الدراسـي الأول)/ المركـز الوطنـي لتطويـر المناهـج. ط2؛ مزيـدة ومنقحـة.– عمـان: المركـز، 2022

(48) ص.

ر.إ.: 2022/4/2054

الواصفات: / الرياضيات/ / المناهج/ / التعليم الثانوي/

يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مصنفه، ولا يعبّر هذا المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية.

British Library Cataloguing -in- Publication Data
A catalogue record for this publication is available from the Library.

الطبعة الأولى (التجريبية) 1442 هـ / 2021 م

أعيدت طباعته 2022 م – 2023 م

أعزّاءنا الطلبة ...

يحتوي هذا الكتاب على تمارين مُتنوِّعة أُعِدَّت بعناية لتغنيكم عن استعمال مراجع إضافية، وهي تُعَدُّ استكمالًا للتمارين الواردة في كتاب الطالب، وتهدف إلى مساعدتكم على ترسيخ المفاهيم التي تتعلَّمونها في كل درس، وتُنمّي مهاراتكم الحسابية.

قد يختار المُعلِّم/ المُعلِّمة بعض تمارين هذا الكتاب واجبًا منزليًّا، ويترك لكم بعضها الآخر لكي تحلّوها عند الاستعداد للاختبارات الشهرية واختبارات نهاية الفصل الدراسي.

أمّا الصفحات التي تحمل عنوان (أستعد لدراسة الوحدة) في بداية كل وحدة، فإنَّها تساعدكم على مراجعة المفاهيم التي درستموها سابقًا؛ ما يُعزِّز قدرتكم على متابعة التعلُّم في الوحدة الجديدة بسلاسة ويسر.

قد لا يتوافر فراغ كافٍ إزاء كل تمرين لكتابة خطوات الحلِّ جميعها؛ لذا يُمكِن استعمال دفتر إضافي لكتابتها بوضوح.

متمنين لكم تعلُّمًا ممتعًا ومُيسَّرًا.

المركز الوطني لتطوير المناهج

قائمة المحتويات

قائمة المحتويات

أختبرُ معلوماتي قبل البدء بدراسة الوحدة، وفي حال عدم تأكّدي من الإجابة أستعين بالمثال المُعطى.

إيجاد قيمة مقدار جبري يتضمن قيمة مطلقة (الدرس 1)

أجد قيمة كل من المقادير الجبرية الآتية عند القيمة المعطاة:

1) $|5x+2|+1,\ x=-3$

2) $|14-x|-18,\ x=1$

3) $-3|3x+8|+5,\ x=-4$

مثال: أجد قيمة المقدار $|x+3|-8$ عندما $x=2$

$|x+3|-8=|2+3|-8$	بتعويض $x=2$
$=|5|-8$	$2+3=5$
$=5-8$	$|5|=5$
$=-3$	بالتبسيط

تمثيل المعادلات الخطّية بيانيًّا (الدرس 1)

أمثّل كلًّا ممّا يأتي بيانيًّا:

4) $y=5$

5) $x=-3$

6) $y=2x-1$

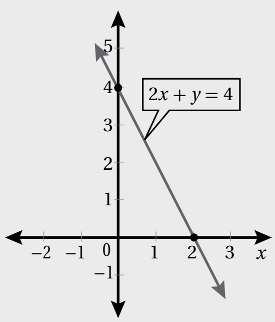
مثال: أمثّل المعادلة $2x+y=4$ في المستوى الإحداثي.

الخطـوة 1 أُنشئ جدول قِيَم.

x	0	2
$y=4-2x$	4	0

الخطـوة 2

أعيّن النقطتين $(0,4)$ $(2,0)$ في المستوى الإحداثي، وأرسم مستقيمًا يمرّ بهما.



- **تمثيل كثير حدود معرّف على فترة بيانيًّا وتحديد مجاله ومداه** (الدرس 1)

أمثل كل اقتران مما يأتي بيانيًّا، وأحدّد مجاله ومداه:

7) $f(x) = x^2 - 3x - 4, -1 \le x \le 5$

8) $f(x) = -4x^2 + 8x + 3, 0 \le x \le 3$

9) $y = 2x^3 - 6x + 4, -2 \le x \le 3$

10) $y = 3x^2 - x^3 + 9x - 4, -3 \le x \le 4$

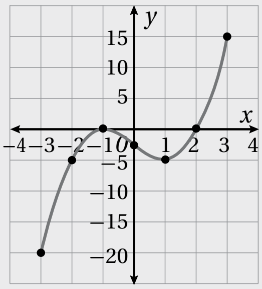
مثال: أمثل كل اقتران مما يأتي بيانيًّا، وأحدّد مجاله ومداه:

a) $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 3x - 2, -3 \le x \le 3}$

الخطوة 1 أنشئ جدول قيم.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = f(x)$	-20	-4	0	-2	-4	0	16
(x, y)	$(-3, -20)$	$(-2, -4)$	$(-1,0)$	$(0, -2)$	$(1, -4)$	$(2, 0)$	$(3, 16)$

الخطوة 2 أعيّن النقاط التي تمثل الأزواج في المستوى الإحداثي، وأصل بينها بمنحنى متصل كما في الشكل المجاور.



مجال هذا الاقتران هو مجموعة قيم x الحقيقية، حيث:

$-3 \le x \le 3$، أو الفترة $[-3, 3]$، ومداه: $-20 \le y \le 16$، أو الفترة $[-20, 16]$.

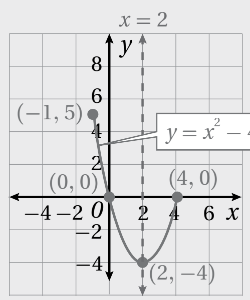
b) $f(x) = x^2 - 4x, -1 \le x \le 4$

هـذا اقتران تربيعي على الصورة $f(x) = ax^2 + bx + c$، حيـث $a = 1, b = -4, c = 0$، ومنحنى $f(x)$ قطع مكافئ يمكن تمثيله بيانيًّا كما يأتي:

- بما أنّ $a > 0$، فمنحنى القطع المكافئ مفتوح للأعلى، ويمثل الرأس نقطته الصغرى.
- معادلة محور تماثل القطع المكافئ هي:

$$x = -\frac{b}{2a} = 2$$

- إحداثيا الرأس هما: $(2, -4)$
- نقطة تقاطع منحنى الاقتران مع المحور y هي: $(0, 0)$
- النقطة $(-1, 5)$ هي نقطة بداية منحنى الاقتران، وتقع في الجانب نفسه الذي يقع فيه المقطع y من محور التماثل (يسار محور التماثل)، أما النقطة $(4, 0)$ فهي نقطة نهاية منحنى الاقتران وتقع يمين محور التماثل.



- أمثل الرأس والنقاط الثلاث في المستوى الإحداثي، وأصل بينها بمنحنى متصل كما في الشكل المجاور.

مجال هذا الاقتران هو مجموعة قيم x الحقيقية حيث:

$-1 \le x \le 4$؛ أي الفترة $[-1, 4]$، ومداه: $-4 \le x \le 5$، أي الفترة $[-4, 5]$.

- **تمثيل اقتران نسبي بيانيًّا يحتوي منحناه فجوة** (الدرس 1)

أمثل كلًّا من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

11) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x + 4}$

12) $f(x) = \dfrac{-x^2 + x^3}{x^3}$

13) $f(x) = \dfrac{3x^4 + 6x^3 + 3x^2}{x^2 + 2x + 1}$

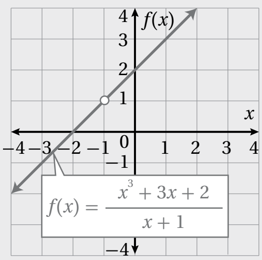
مثال: أمثل الاقتران $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x+1}$ بيانيًّا.

أختصر العوامل المشتركة بين البسط والمقام.

أحلّل البسط
$$f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x+1} = \frac{(x+2)(x+1)}{x+1}$$

أختصر العامل المشترك $(x+1)$
$$= \frac{(x+2)\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}} = x+2$$

إذن، التمثيل البياني للاقتران $f(x)=\frac{x^2+3x+2}{x+1}$ هو ذاته التمثيل البياني للاقتران $f(x) = x+2$ مع وجود فجوة (دائرة صغيرة مفرغة) في المنحنى عند $x = -1$ كما يظهر في الشكل المجاور.



- **حلّ متباينات خطّية بمتغيّر واحد، وتمثيل الحلّ على خطّ الأعداد** (الدرس 2)

أحلّ كلّ متباينة ممّا يأتي، وأمثّل مجموعة الحلّ على خطّ الأعداد:

14) $x - 3 > 2$
15) $2 - x > -3$
16) $3x \geq 12$
17) $2x - 3 \leq 9$
18) $6 - 4x < x - 14$
19) $2(x+5) - 9x \geq 45$

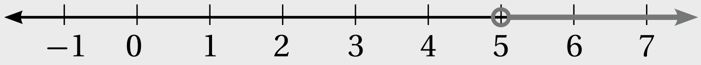
مثال: أحلّ المتباينة $2x + 3 > 13$، وأمثّل مجموعة الحلّ على خطّ الأعداد:

المتباينة الأصلية $2x + 3 > 13$

بطرح 3 من الطرفين $2x > 10$

بقسمة الطرفين على 2 $x > 5$

مجموعة الحلّ هي: $\{x \mid x > 5\}$ أو الفترة $(5, \infty)$. وتمثيلها على خطّ الأعداد كما يأتي:



وُضِعت دائرة مفتوحة عند 5؛ لعدم وجود إشارة المساواة، أي إنّ 5 ليس من ضمن مجموعة الحلّ.

حلّ معادلات القيمة المطلقة (الدرس 2)

أحلّ كلًّا من المعادلات الآتية، وأمثل مجموعة الحلّ على خط الأعداد (إن أمكن):

20) $|x+3| = 7$

21) $|x-8| = 14$

22) $|-3x| = 15$

23) $|3x+2| + 2 = 5$

24) $|2x-4| - 8 = 10$

25) $-4|8-5x| = 16$

مثال: أحلّ كلًّا من المعادلات الآتية، وأمثل مجموعة الحلّ على خط الأعداد (إن أمكن):

a) $2|x-4| + 10 = 16$

لحلّ هذه المعادلة، أكتب القيمة المطلقة أولًا معزولةً في أحد طرفي المعادلة.

$2|x-4| + 10 = 16$ المعادلة المعطاة

$2|x-4| = 6$ بطرح 10 من طرفي المعادلة

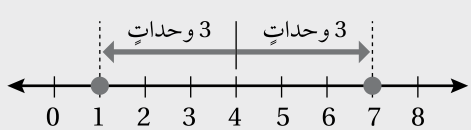
$|x-4| = 3$ بقسمة طرفي المعادلة على 2

الآن، أكتب معادلتين مرتبطتين بالمعادلة $|x-4| = 3$، ثمّ أحلّ كلًّا منهما.

$x-4 = 3$ or $x-4 = -3$ بكتابة المعادلتين المرتبطتين

$x = 7$ $\quad$ $x = 1$ بجمع 4 لكلّ طرف

إذن، مجموعة حلّ المعادلة هي: $\{1, 7\}$، وتمثيلها على خط الأعداد على النحو الآتي:



b) $|3x+1| = -5$

المعادلة $|3x+1| = -5$ تعني أن المسافة بين $3x$ وَ -1 تساوي -5

وبما أنه لا يمكن أن تكون المسافة سالبة، فإن مجموعة حلّ هذه المعادلة هي ϕ أي أنه لا يوجد حلّ للمعادلة.

حلّ متباينات القيمة المطلقة (الدرس 2)

أحلّ كلًّا من المتباينات الآتية، وأمثل مجموعة الحلّ على خط الأعداد (إن أمكن):

26) $|x+8| \leq 3$

27) $|2x-5| < 9$

28) $|3x+1| > 8$

29) $|3x-1|+6 > 0$

30) $2|3x+8|-13 \leq -5$

31) $-3|2-4x|+5 < -13$

32) $|6x+2| < -4$

33) $3|5x-7|-6 < 24$

34) $|5x+3|-4 \geq 9$

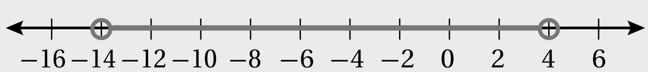
مثال: أحلّ كلًّا من المتباينات الآتية، وأمثل مجموعة الحلّ على خط الأعداد (إن أمكن):

a) $\boldsymbol{|x+5| < 9}$

$-9 < x+5 < 9$ بكتابة متباينة القيمة المطلقة على صورة متباينة مركّبة

$-14 < x < 4$ بطرح 5 من كلا الطرفين

إذن، مجموعة حلّ المتباينة هي $\{x \mid -14 < x < 4\}$، ويمكن كتابتها باستعمال رمز الفترة على الصورة: $(-14, 4)$، ويمكن تمثيلها على خط الأعداد على النحو الآتي:



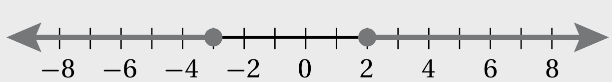
b) $\boldsymbol{|2x+1| \geq 5}$

$2x+1 \leq -5$ or $2x+1 \geq 5$ بكتابة متباينة القيمة المطلقة على صورة متباينة مركّبة

$2x \leq -6$ $\quad$ $2x \geq 4$ بطرح 1 من كلّ طرف

$x \leq -3$ or $x \geq 2$ بقسمة كلّ طرف على 2

إذن، مجموعة الحلّ هي $\{x \mid x \leq -3 \text{ or } x \geq 2\}$، ويمكن كتابتها باستعمال اتحاد فترتين منفصلتين على الصورة: $(-\infty, -3] \cup [2, \infty)$، وتمثيلها البياني على النحو الآتي:



حلّ نظام مكوّن من معادلتين خطّيتين (الدرس 3)

أحلّ أنظمة المعادلات الآتية:

37) $y = 2x - 1$
$3x + 2y = 19$

36) $3x - 5y = 11$
$2x - y = 5$

35) $2x + y = 12$
$3x - 2y = 11$

مثال: أحلّ نظام المعادلات:

$$y = 2 - 3x \qquad (1)$$
$$2x - 5y = 24 \qquad (2)$$

الطريقة 1: تعويض قيمة y من المعادلة (1) في المعادلة (2).

المعادلة (2)	$2x - 5y = 24$
بتعويض $y = 2 - 3x$	$2x - 5(2 - 3x) = 24$
خاصية التوزيع	$2x - 10 + 15x = 24$
بجمع الحدود المتشابهة	$17x - 10 = 24$
بإضافة 10 لطرفَي المعادلة	$17x = 34$
بقسمة الطرفين على 17	$x = 2$
بتعويض $x = 2$ في المعادلة (1)	$y = 2 - 3(2) = -4$

الطريقة 2: حذف أحد المتغيّرين.

بإعادة ترتيب المعادلة (1)	$3x + y = 2$
بضرب المعادلة (1) في 5	$15x + 5y = 10$
المعادلة (2)	$2x - 5y = 24$
بجمع المعادلتين	$17x = 34$
بقسمة الطرفين على 17	$x = 2$
بتعويض $x = 2$ في (1)	$y = 2 - 3(2) = -4$

إذن: حلّ هذا النظام هو $x = 2, y = -4$

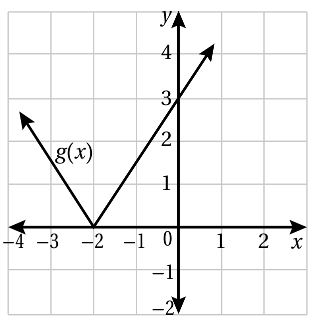
الاقترانات المتشعّبة
Piecewise Functions

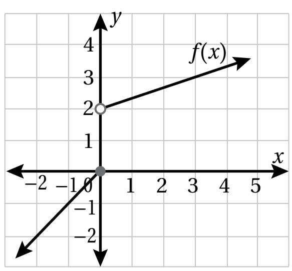
أُعيد تعريف كُلّ من الاقترانين الآتيين:

1) $f(x) = |5x - 4|$

2) $f(x) = |3 - 2x| - 6$

أكتبُ قاعدة الاقتران المعطى تمثيله البياني، في كُلّ ممّا يأتي:

3) 

4) 

أُمثّل كُلًّا من الاقترانات الآتية بيانيًّا، وأُحدّد مجاله ومداه:

5) $f(x) = \begin{cases} 3x - 4 & , x < 3 \\ x + 3 & , x \geq 3 \end{cases}$

6) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3 & , x < 1 \\ 5 & , 1 \leq x < 4 \\ x + 2 & , x \geq 4 \end{cases}$

7) $f(x) = |2x - 6| + 3$

8) $f(x) = -|x^2 - 2x - 8|$

9) **كهربـاء:** تزوّد شركة الكهرباء القطاع التجاري بالطاقة الكهربائية مقابل 1.20 دينار شهريًّا (رسومًا ثابتة)، يُضاف إليها 0.121 دينار لكُلّ كيلو واط ساعة لأول 2000 كيلو واط ساعة في الشهر، و 0.176 دينار لكُلّ كيلو واط ساعة من كمّية الاستهلاك الزائدة على 2000 كيلو واط ساعة في الشهر. أكتبُ الاقتران الذي يُعطي قيمة فاتورة الكهرباء بدلالة كمّية الاستهلاك x كيلو واط ساعة شهريًّا.

الدرس 2

حلّ معادلات ومتباينات القيمة المطلقة
Solving Absolute Value Equations and Inequalities

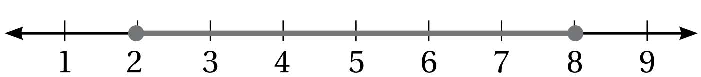
أحلّ كُلًّا من المعادلات الآتية، وأتحقّق من صحّة الحلّ:

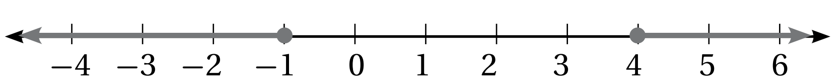
1. $|5x-2| = 6$
2. $4|x+2| - 3 = 9$
3. $10 - 2|x+1| = 6$
4. $5 + |x-2| = 3$
5. $\left|\frac{x-2}{3}\right| = 2x - 1$
6. $|3x-5| = |1-2x|$
7. $|x^2 - 2| = x$
8. $|3x + 5| = |7 - x|$
9. $\left|\frac{3x+4}{2x+1}\right| = 2$

أحلّ كُلًّا من المتباينات الآتية، وأُمثّل مجموعة الحلّ على خطّ الأعداد:

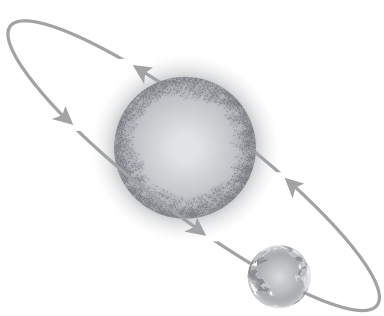
10. $|4-3x| \geq 10$
11. $6|4x + 2| - 8 < 34$
12. $|5x-10| > 4 - 2x$
13. $|3x - 2| > |2x + 7|$
14. $|3 - 2x| \leq |4x + 3|$
15. $|1 + 7x| \geq |x-6|$

أكتبُ متباينة قيمة مطلقة، تمثيل مجموعة حلّها على خطّ الأعداد كما يأتي:

16. 

17. 

18. **فلك:** في أثناء دوران الأرض حول الشـــمس، يكون متوسّط المسافة بينهما 92.95 مليون ميل، ولا يزيد بعدها عن الشـــمس أو يقلّ عن هذا المتوســـط بأكثر من 1.55 مليون ميل خلال العام. أكتبُ متباينة قيمة مطلقة ، ثم أستعملها لإيجاد مدى بعد الأرض عن الشمس خلال العام.



الدرس 3

حلّ نظام مُكوّن من متباينات خطّية بمتغيّرين بيانيًّا

Solving System of Linear Inequalities In Two Variables

أُمثّل كُلًّا من المتباينات الآتية بيانيًّا:

1. $\frac{1}{2}x + y \leq 20$
2. $x + 4y > 2$
3. $y < -|3x+1| - 6$
4. $y \leq \frac{3}{4}x + 6$
5. $y > |2x - 1|$
6. $y - 3 \geq -2|x + 4|$

أُمثّل منطقة حلّ كُلّ من أنظمة المتباينات الآتية:

7. $3x - 2y \geq 18$, $x + y \leq 6$
8. $x + y \leq 10$, $2x - 4y \geq 4$
9. $2x + 9y \geq 18$, $y \leq |x - 6|$
10. $y \geq |2x+4| - 2$, $x + 3y \leq 15$
11. $x + 3y \leq 9$, $5x - y \geq 5$, $y \geq -3$
12. $x + 2y \leq 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

يريد صاحب مطعم أن يشتري عددًا من الطاولات والكراسي الخشبية، وقد خصّص لهذه الغاية 420 دينارًا، ووجد أنّ الطاولة الواحدة تُكلّفه 35 دينارًا، والكرسي الواحد يُكلّفه 9 دنانير.

13. أكتبُ متباينة تُبيّن عدد الطاولات وعدد الكراسي التي يُمكنه شراؤها.
14. أُمثّل متباينة الطاولات والكراسي بيانيًّا.
15. أكتبُ 3 حلول ممكنة لعدد الطاولات وعدد الكراسي التي يُمكنه شراؤها.

رياضة: في مباريات دوري كرة القدم، يُسجّل للفريق نقطتان عند فوزه، ونقطة واحدة عند تعادله، ولا شيء عند خسارته، ويعلم أحمد أنّ: رصيد فريقه هو 18 نقطة على الأكثر، وأنّ عدد مرّات فوز فريقه أكبر من عدد مرّات تعادله، وأنّ فريقه تعادل مرّتين على الأقل.

16. أكتبُ متباينة بدلالة عدد مرّات الفوز x، وعدد مرّات التعادل y لكُلّ واحدة من الجمل الثلاث.
17. أُمثّل منطقة حلّ هذه المتباينات بيانيًّا.
18. أجد القِيَم الممكنة جميعها، لعدد مرّات فوز فريقه وعدد مرّات تعادله.

الوحدة 2: تحليل الاقترانات

أختبرُ معلوماتي قبل البدء بدراسة الوحدة، وفي حال عدم تأكّدي من الإجابة أستعينُ بالمثال المُعطى.

قسمة كثيرات الحدود (الدرس 1)

أجد ناتج القسمة والباقي في كُلّ ممّا يأتي:

1) $(3x^3 - 6x^2 + 9x - 5) \div (x - 4)$

2) $(8x^4 + 6x^2 - 11x + 7) \div (2x + 5)$

مثال: أجد ناتج القسمة والباقي $(3x^3 + 9x - 5) \div (x^2 - 3x + 1)$

$$\begin{array}{r l}
 & 3x + 9 \\
x^2 - 3x + 1 \,\big) & 3x^3 + 0x^2 + 9x - 5 \\
 & (-)\ 3x^3 - 9x^2 + 3x \\
 & 9x^2 + 6x - 5 \\
 & (-)\ 9x^2 - 27x + 9 \\
 & 33x - 14
\end{array}$$

بقسمة $3x^3$ على x^2 وكتابة الناتج $3x$ فوق المقسوم

بضرب $3x$ في المقسوم عليه

بالطرح، وتنزيل -5 وقسمة $9x^2$ على x^2 وكتابة 9 في الناتج

بضرب 9 في المقسوم عليه

بالطرح

إذن: الناتج $(3x + 9)$ والباقي $(33x - 14)$.

تحديد عدد حلول المعادلة التربيعية (الدرس 1)

أحدّد عدد حلول كل من المعادلات الآتية:

3) $x^2 + 6x - 7 = 0$

4) $x^2 - 4x + 4 = 0$

5) $x^2 - 2x + 7 = 0$

مثال: أحدد عدد حلول المعادلة الآتية:

$$x^2 + x + 4 = 0$$

أحدد قيم المعاملات، ثم أعوضها في صيغة المميز:

$a = 1, b = 1, c = 4$

$\Delta = b^2 - 4ac$ صيغة المميز (Δ)

$= 1^2 - 4(1)(4) = -15$ بتعويض قيم المعاملات والتبسيط

قيمة المميز تساوي -15 (سالبة)، إذن: لا توجد حلول حقيقية للمعادلة التربيعية.

أتذكر

إذا كانت قيمة المميزِ موجبةً فإن للمعادلةِ التربيعيةِ حلّين، وإذا كانت قيمةُ المميزِ صفرًا فإن للمعادلة التربيعية حلًّا واحدًا فقط.

- **حلّ المعادلات التربيعية بالتحليل: إخراج العامل المشترك الأكبر** (الدرس 1)

أحلّ كلًّا من المعادلات الآتية:

6) $x^2 - 3x = 0$

7) $8x^2 = -12x$

8) $4x^2 + 9x = 0$

9) $7x^2 = 6x$

مثال: أحلّ المعادلة $6x^2 = 20x$

المعادلة المعطاة	$6x^2 = 20x$
بطرح $20x$ من طرفي المعادلة	$6x^2 - 20x = 0$
بإخراج العامل المشترك الأكبر	$2x(3x - 10) = 0$
خاصيّة الضّرب الصفري	$2x = 0 \quad \text{or} \quad 3x - 10 = 0$
بحلّ كل معادلة	$x = 0 \qquad x = \frac{10}{3}$

إذن، الجذران هما: $0, \frac{10}{3}$

التحقق: أعوّض قيمتي x في المعادلة الأصلية.

- **حلّ المعادلات التربيعية بالتحليل: الصورة القياسية $x^2 + bx + c = 0$** (الدرس 1)

أحلّ كلًّا من المعادلات الآتية:

10) $x^2 - 2x - 15 = 0$

11) $t^2 - 8t + 16 = 0$

12) $x^2 - 18x = -32$

13) $x^2 + 2x = 24$

14) $x^2 = 17x - 72$

15) $x^2 + 5x + 4 = 0$

16) $s^2 + 20s + 100 = 0$

17) $y^2 + 8y = 20$

18) $m^2 - 12m + 32 = 0$

مثال: أحلّ كلًّا من المعادلات الآتية:

a) $x^2 + 6x + 8 = 0$

المعادلة المعطاة	$x^2 + 6x + 8 = 0$
بالتحليل إلى العوامل	$(x+4)(x+2) = 0$
خاصية الضرب الصفري	$x + 4 = 0$ or $x + 2 = 0$
بحلّ كل معادلة	$x = -4$ $x = -2$

إذن، الجذران هما: $-4, -2$

التحقق: أعوّض قيمتي x في المعادلة الأصلية.

أتذكر

لتحليل ثلاثي حدود على الصورة $x^2 + bx + c$، حيث b، و c عددان صحيحان، أبحث عن عددين صحيحين m وَ n مجموعهما يساوي b، وحاصل ضربهما يساوي c، ثم أكتب x^2+bx+c على الصورة $(x+m)(x+n)$.

b) $x^2 + 5x = 6$

المعادلة المعطاة	$x^2 + 5x = 6$
بطرح 6 من طرفي المعادلة	$x^2 + 5x - 6 = 0$
بالتحليل إلى العوامل	$(x-1)(x+6) = 0$
خاصية الضرب الصفري	$x - 1 = 0$ or $x + 6 = 0$
بحلّ كل معادلة	$x = 1$ $x = -6$

إذن، الجذران هما: $1, -6$

التحقق: أعوّض قيمتي x في المعادلة الأصلية.

• حلّ المعادلات التربيعية بالتحليل: الصورة القياسية $ax^2 + bx + c = 0$ (الدرس 1)

أحلّ كلًّا من المعادلات الآتية:

21) $5x^2 + 8x + 3 = 0$ 20) $18t^2 + 9t + 1 = 0$ 19) $24x^2 - 19x + 2 = 0$

24) $6x^2 + 15x - 9 = 0$ 23) $4t^2 - 4t - 35 = 0$ 22) $5x^2 - 9x - 2 = 0$

27) $8x(x+1) = 16$ 26) $9d^2 - 24d - 9 = 0$ 25) $28s^2 - 85s + 63 = 0$

مثال: أحلّ المعادلة $30x^2 - 5x = 5$

المعادلة المعطاة	$30x^2 - 5x = 5$
بطرح 5 من طرفي المعادلة	$30x^2 - 5x - 5 = 0$
بقسمة طرفي المعادلة على 5	$6x^2 - x - 1 = 0$
بالتحليل إلى العوامل	$(3x + 1)(2x - 1) = 0$
خاصية الضرب الصفري	$3x+1 = 0$ or $2x-1 = 0$
بحلّ كل معادلة	$x = -\frac{1}{3}$ $\quad x = \frac{1}{2}$

إذن، الجذران هما: $-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$

أتذكر

لتحليل ثلاثي الحدود $ax^2 + bx + c$، حيث a، وb، وc أعداد صحيحة، أجد عددين صحيحين m وَ n حاصل ضربهما يساوي (ac)، ومجموعهما يساوي b، ثمّ أكتب $ax^2 + bx + c$ على الصورة $ax^2 + mx + nx + c$، ثم أحلّل بتجميع الحدود.

حلّ المعادلة التربيعية بالقانون العام (الدرس 1)

أحلّ المعادلات الآتية باستعمال القانون العام:

30 $x^2 + 2x - 5 = 0$

29 $x^2 + 4x - 1 = 0$

28 $x^2 + x - 6 = 0$

مثال: أحلّ المعادلة: $x^2 + 4x - 12 = 0$ باستعمال القانون العام.

لحلّ المعادلة باستعمال القانون العام، أجد قيم المعاملات:

$$a = 1, b = 4, c = -12$$

القانون العام

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

بالتعويض والتبسيط

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{2}$$

$$x = \frac{-4 - 8}{2} = -6\ , \quad x = \frac{-4 + 8}{2} = 2$$

إذن، حلّا المعادلة هما: $x = -6, x = 2$

تبسيط المقادير النسبية (الدرس 2)

أُبسّط المقادير الآتية:

31) $\frac{2}{x+1} + \frac{5}{x-3}$

32) $\frac{4}{x-3} - \frac{5}{x+2}$

33) $\frac{3x}{x-1} \times \frac{x+4}{6x}$

34) $\frac{x}{x+1} \div \frac{x+4}{2x+2}$

35) $\frac{x+4}{x^2-16}$

36) $\frac{x^2-4x-5}{x+1}$

مثال: أُبسّط المقادير الآتية:

a) $\frac{2}{x+6} + \frac{3}{x-5}$

$\frac{2}{x+6} + \frac{3}{x-5} = \frac{2}{x+6}\left(\frac{x-5}{x-5}\right) + \frac{3}{x-5}\left(\frac{x+6}{x+6}\right)$ بتوحيد المقامات

$= \frac{2(x-5)}{(x+6)(x-5)} + \frac{3(x+6)}{(x-5)(x+6)}$ بضرب البسطين وضرب المقامين

$= \frac{2(x-5)+3(x+6)}{(x+6)(x-5)}$ بجمع بسطَي الكسرين

$= \frac{2x-10+3x+18}{x^2-5x+6x-30}$ خاصية التوزيع

$= \frac{5x+8}{x^2+x-30}$ بجمع الحدود المتشابهة

b) $\frac{5x+2}{6x} \div \frac{x+1}{2x}$

$\frac{5x+2}{6x} \div \frac{x+1}{2x} = \frac{5x+2}{6x} \times \frac{2x}{x+1}$ بتحويل القسمة إلى ضرب في مقلوب المقسوم عليه

$= \frac{2x(5x+2)}{6x(x+1)}$ بضرب البسطين وضرب المقامين

$= \frac{5x+2}{3(x+1)}$ بقسمة البسط والمقام على $2x$

- **تمثيل اقتران نسبي لا يوجد عوامل مشتركة بين بسطه ومقامه** (الدرس 4)

أمثل كلّ اقتران مما يأتي، وأحدّد مجاله ومداه:

37) $f(x) = \frac{2}{x-3}$

38) $h(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$

39) $g(x) = \frac{4}{x+2} - 1$

مثال: أمثل الاقتران $f(x) = \frac{5}{x-3} + 2$ بيانيًّا، وأحدّد مجاله ومداه.

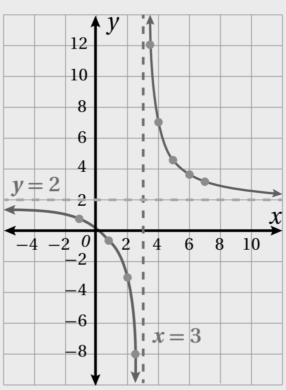
الخطـوة 1 أجدُ خطوط التقارب لمنحنى الاقتران.

خطّ التقارب الرأسيّ هو المستقيم $x = 3$، وخطّ التقارب الأفقيّ هو المستقيم $y = 2$

الخطـوة 2 أنشئ جدول قِيَم باختيار بعض القِيَم حول ($x = 3$)؛ لأنّ الاقتران غير مُعرَّف عند 3:

x	-1	0	1	2	2.5	3.5	4	5	6	7
$f(x)$	0.75	0.33	-0.5	-3	-8	12	7	4.5	3.67	3.25

الخطـوةُ 3 أرسم خطَّي التقارب، ثمّ أعيّن النقاط (x, y) في المستوى الإحداثيّ، وأصل بين النقاط إلى يمين المستقيم $x = 3$ بمنحنى أمدّه بمحاذاة خطَّي التقارب، ثمّ أصل بين النقاط إلى يسار المستقيم $x = 3$ بمنحنى أمدّه بمحاذاة خطَّي التقارب، فينتج الشكل المجاور.



المجال هو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا 3، أو $\{x \mid x \neq 3\}$.

المدى هو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا 2، أو $\{y \mid y \neq 2\}$.

أتذكر

خط التقارب الرأسي: يكون للاقتران النسبي الذي على صورة $f(x) = \frac{a}{(x-b)} + c$

خط تقارب رأسي عند صفر المقام هو المستقيم $x = b$

خط التقارب الأفقي: يكون للاقتران النسبي الذي على صورة $f(x) = \frac{a}{(x-b)} + c$

خط تقارب أفقي هو المستقيم $y = c$

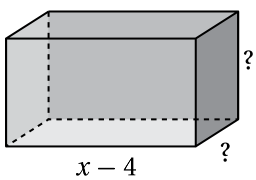
نظريتا الباقي والعوامل
Remainder and Factor Theorems

أستعملُ طريقة الجدول؛ لأجد ناتج القسمة والباقي في كُلّ ممّا يأتي:

1. $(6x^3 - 7x^2 + 6x+45) \div (2x +3)$

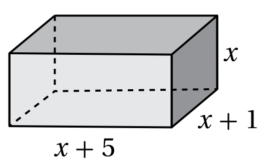
2. $(3x^4 + x^3 - 9x^2 -8x +9) \div (x -2)$

3. يُمثّل الاقتران $V(x) = x^3+3x^2-36x+32$ حجم متوازي المســتطيلات المجاور.
أجد الأبعاد الأخرى لمتوازي المستطيلات بدلالة x.



4. إذا كان باقي قسمة $f(x) = 2x^3 - x^2 +a x +6$ على $x + 2$ يساوي (-4)؛ فما قيمة a؟

5. أجد أبعاد متوازي المستطيلات في الشكل المجاور إذا كان حجمه 180 cm^3



6. إذا كان باقي قســمة $f(x)= ax^3 + bx^2 + bx + 3$ على $h(x) = x - 1$ يساوي 4، وكان $(x + 1)$ عاملًا من عوامل $f(x)$؛ فما قيمة كُلّ من a، وb؟

أُحلّل كُلّ اقتران ممّا يأتي تحليلًا تامًّا:

7. $3x^3 +14x^2 -7x -10$

8. $2x^4 + x^3 -5x^2 + 2x$

أحلّ كُلًّا من المعادلات الآتية:

9. $3x^3 -4x^2 -6x +4 = 0$

10. $2x^3 +5x^2 -16x -36 = 0$

11. يزيـــد ارتفاع مخروط 5 cm على طول نصــف قطر قاعدته. إذا كان حجم هذا المخــروط $132\pi \text{ cm}^3$؛ فما أبعاده؟
(حجم المخروط هو $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$، حيث r نصف قطر القاعدة، وh الارتفاع).

الكسور الجزئية
Partial Fractions

أُجزّئ كُلًّا من المقادير النسبية الآتية إلى كسور جزئية:

1) $\frac{x^2 - 2x - 3}{(x+1)(2x+5)(7-3x)}$

2) $\frac{3x - 5}{x(x-1)^2}$

3) $\frac{x^2 + x - 2}{(2x-1)(x^2+1)}$

4) $\frac{5x - 1}{2x^2 - 5x - 3}$

5) $\frac{9 - 5x}{x^3 - 4x^2 + 3x}$

6) $\frac{36 + 5x}{16 - x^2}$

7) $\frac{8x + 3}{x^2 - 3x}$

8) $\frac{3x^2 - 2x - 5}{x^3 + x^2}$

9) $\frac{3x^2 + 2x + 2}{(x-2)(x-3)^2}$

10) $\frac{2x^2 - 3x - 27}{x^3 - 6x^2 + 9x}$

11) $\frac{5x + 8}{4x^3 - 12x^2 + 9x - 2}$

12) $\frac{5x^2 + 2}{(x^2+3)(1-2x)}$

13) $\frac{24}{(2x^2 + x + 5)(x-1)}$

14) $\frac{6x^2 + 8x - 7}{2x^2 + 3x - 5}$

15) $\frac{x^3 - 3x^2 - 3x + 12}{x^2 - 3x + 2}$

16) أجد الاقتران النسبي الذي يُمكن كتابته بصورة كسور جزئية على النحو الآتي:

$$\frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+1}$$

أُجزّئ كُلًّا من المقادير النسبية الآتية إلى كسور جزئية:

17) $\frac{ax + b}{(x - c)^2}$

18) $\frac{1}{x^2 - ax - bx + abx}$

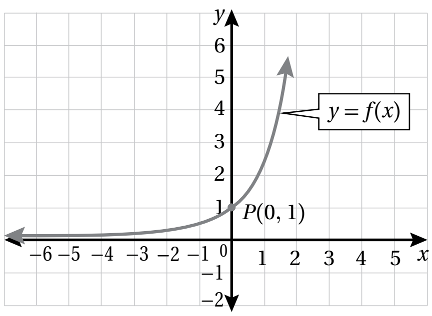
19) $\frac{ax + b}{x^2 - c^2}$

20) أُجزّئ المقدار $\frac{2}{x(x+2)}$ ، ثم استعمل ناتج التجزئة في إيجاد المجموع الآتي:

$$\frac{2}{1 \times 3} + \frac{2}{3 \times 5} + \frac{2}{5 \times 7} + \dots + \frac{2}{11 \times 13}$$

التحويلات الهندسية للاقترانات
Transformations of Functions

أستعملُ التمثيل البياني المجاور الذي يُبيّن منحنى $f(x)$؛ لتمثيل منحنى كُلّ من الاقترانات الآتية، مبيّنًا إحداثيَي النقطة P في كل حالة:

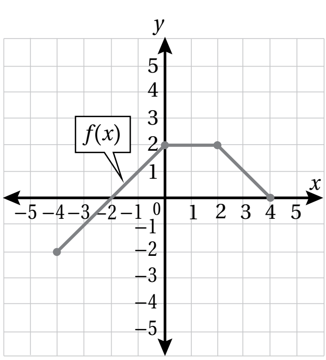


1) $g(x) = f(x) + 1$
2) $h(x) = 2f(x + 1)$
3) $m(x) = f(-x + 2)$
4) $p(x) = -f(x)$

أصف التحويلات التي تمّت على $f(x)$ للحصول على $g(x)$ في كُلّ ممّا يأتي:

5) $g(x) = -3f(x-2) + 5$
6) $g(x) = 2f(4-x) - 3$

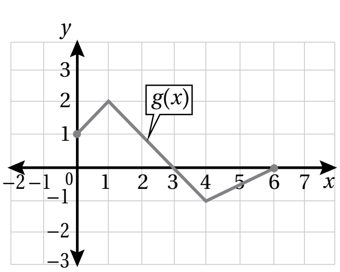
أستعملُ التمثيل البياني المجاور الذي يُبيّن منحنى $f(x)$؛ لتمثيل منحنى كُلّ من الاقترانات الآتية:



7) $g(x) = f(x) + 1$
8) $q(x) = f(x + 2)$
9) $p(x) = \frac{1}{2}f(x + 1)$
10) $s(x) = -f(x)$

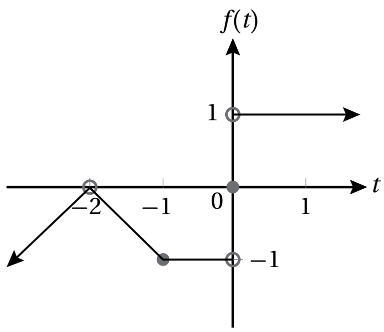
11) **سكّان:** يُمثّل الاقتران $P(t) = 3000 + 0.1t^2$ عدد سكّان أحد التجمّعات السكنية؛ إذ يُمثّل t عدد السنوات منذ تأسيس هذا التجمّع في عام 1985م. أصف التحويلات التي تمّت على الاقتران $f(t) = t^2$ للحصول على الاقتران $P(t)$.

أستعملُ التمثيل البياني المجاور الذي يُبيّن منحنى $g(x)$؛ لتمثيل منحنى كُلّ من الاقترانات الآتية:



12) $h(x) = g(2x)$
13) $p(x) = g(\frac{1}{2}x)$

النهايات والاتّصال
limits and continuity



يُبيّن التمثيـل البياني المجاور منحنى الاقتـران $f(t)$. أجد كُلًّا من النهايات الآتية (إن وجدت):

1 $\lim\limits_{t\to 0} f(t)$ 2 $\lim\limits_{t\to -1} f(t)$ 3 $\lim\limits_{t\to -2} f(t)$

أجد كُلًّا من النهايات الآتية بيانيًّا وعدديًّا:

4 $\lim\limits_{x\to 5}\left(\frac{x^2-25}{x-5}\right)$ 5 $\lim\limits_{x\to -2}(x^2-x+2)$ 6 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}\right)$

إذا كان $f(x)=\begin{cases} x^2 & ,x\le 2 \\ 6-x & ,x>2 \end{cases}$ ؛ فأجيب عمّا يأتي:

7 أُمثّل $f(x)$ بيانيًّا.

8 أجد كُلًّا من النهايات الآتية من التمثيل البياني للاقتران $f(x)$:

a) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 6} f(x)$

أجد كُلًّا من النهايات الآتية:

9 $\lim\limits_{x\to -7}(2x+5)$ 10 $\lim\limits_{x\to 2}(-x^2+5x-2)$ 11 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+3}{x+6}$

12 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x-2}{1-x}\right)$ 13 $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{2x-6}{x+5}\right)$ 14 $\lim\limits_{z\to -4}\sqrt[3]{2z-8}$

15 $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{2x^2-18}{x^3-27}\right)$ 16 $\lim\limits_{x\to 5}\left(\frac{x^2-7x+10}{25-5x}\right)$ 17 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{3x+1}-1}{x}\right)$

18 أبحثُ في اتّصال الاقتران $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-4}{2-x} & ,x<2 \\ x-6 & ,x\ge 2 \end{cases}$ ، عند $x=2$

الوحدة 3: الاشتقاق

أختبرُ معلوماتي قبل البدء بدراسة الوحدة، وفي حال عدم تأكّدي من الإجابة أستعينُ بالمثال المُعطى.

التحويل من الصيغة الجذرية إلى الصيغة الأُسّية (الدرس 1)

أُحوّل كلًّا ممّا يأتي من الصيغة الجذرية إلى الصيغة الأُسّية:

1) $\sqrt[5]{x^4}$

2) $\sqrt[3]{x}$

3) $\sqrt{x-1}$

4) $\dfrac{5}{\sqrt[7]{x^4}}$

مثال: أُحوّل كلًّا ممّا يأتي من الصيغة الجذرية إلى الصيغة الأُسّية:

a) $\sqrt[6]{x^7}$

$\sqrt[6]{x^7} = x^{\frac{7}{6}}$ تعريف الأُسّ النسبي

b) $\dfrac{3}{\sqrt[7]{x-2}}$

$\dfrac{3}{\sqrt[7]{x-2}} = \dfrac{3}{(x-2)^{\frac{1}{7}}}$ تعريف الأُسّ النسبي

$= 3(x-2)^{\frac{-1}{7}}$ الأُسّ السالب

ضرب المقادير الجبرية (الدرس 1)

أجد ناتج ضرب كُلّ ممّا يأتي بأبسط صورة:

5) $2x(x-4)$

6) $(x+4)(x-5)$

7) $(3x+1)^2$

مثال: أجد ناتج ضرب $(2x+1)(5x-2)$.

$(2x+3)(5x-2) = 2x(5x-2) + 3(5x-2)$ بفصل المقدار $2x+3$ إلى حدّين وضرب كُلٍّ منهما في المقدار $5x-2$

$= (10x^2 - 4x) + (15x - 6)$ باستعمال خاصية التوزيع

$= 10x^2 - 4x + 15x - 6$ بجمع الحدود المتشابهة

$= 10x^2 - 11x - 6$ بالتبسيط

مشتقّة كثيرات الحدود (الدرس 1)

أجد مشتقّة كُلّ من الاقترانات الآتية:

8 $f(x) = 2x^3 + 6$

9 $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 6x - 10$

10 $f(x) = x^4 + 8x^2$

مثال: أجد مشتقة الاقتران $f(x) = x^4 - 7x^2$

الاقتران الأصلي	$f(x) = x^4 - 7x^2$
قانون مشتقّة مضاعف القوة	$f'(x) = 4x^{4-1} - 7(2x^{2-1})$
بالتبسيط	$= 4x^3 - 14x$

إيجاد ميل منحنى الاقتران باستعمال المشتقة (الدرس 1)

إذا كان $f(x) = 5x^2 + 25x - 9$، فأستعمل المشتقة لإيجاد كل مما يأتي:

11 ميل منحنى $f(x)$ عندما $x = -2$.

12 قيمة x التي يكون عندها ميل منحنى الاقتران صفرًا.

مثال: إذا كان $f(x) = 3x^2 - 18x + 5$، فأستعمل المشتقة لإيجاد ميل منحنى $f(x)$ عندما $x = 1$.

الاقتران الأصلي	$f(x) = 3x^2 - 18x + 5$
باشتقاق الاقتران	$f'(x) = 6x - 18$
بتعويض قيمة $x = 1$	$f'(1) = 6(1) - 18$
بالتبسيط	$= -12$

إذن، ميل منحنى الاقتران $f(x)$ عندما $x = 1$ هوَ -12

إيجاد سرعة جسم وتسارعه باستعمال المشتقة إذا عُلِم اقتران موقعه (الدرس 1)

13 يمثل الاقتران $s(t) = 2.5t^2 + 0.1t - 0.3$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم حيث s موقع الجسم بالأمتار بعد t ثانية. أجد سرعة الجسم وتسارعه عندما $t = 3$.

مثال: يمثل الاقتران $s(t) = 0.6t^3 - 1.5t - 0.9$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s موقع الجسم بالأمتار بعد t ثانية:

a) أجد سرعة الجسم بعد 3 ثوان من بدء حركته.

السرعة هي مشتقة اقتران الموقع. أفترض أن اقتران السرعة هو $v(t)$.

إذن، $v(t) = s'(t)$.

المطلوب هو $v(3) = s'(3)$، التي تمثل السرعة اللحظية عندما $t = 3$.

مشتقة اقتران الموقع	$s'(t) = 1.8t^2 - 1.5$
تعريف اقتران السرعة	$v(t) = s'(t) = 1.8t^2 - 1.5$
بتعويض $t = 3$	$v(3) = s'(3) = 1.8(3)^2 - 1.5$
بالتبسيط	$= 14.7 \text{ m/s}$

إذن، سرعة الجسم بعد 3 ثوان من بدء حركته هي 14.7 m/s

b) أجد تسارع الجسم بعد 5 ثوان من بدء حركته.

التسارع هو مشتقة اقتران السرعة. أفترض أنّ اقتران التسارع هو $a(t)$.

إذن، $a(t) = v'(t)$.

المطلوب هو $a(5) = v'(5)$، التي تمثل التسارع عندما $t = 5$.

مشتقة اقتران السرعة	$a(t) = v'(t) = 3.6t$
بتعويض $t = 5$	$a(5) = 3.6(5)$
بالتبسيط	$= 18$

إذن، تسارع الجسم بعد 5 ثوان من بدء حركته هو 18 m/s^2

- **إيجاد القيم العظمى المحلّية والقيم الصغرى المحلّية لاقتران باستعمال المشتقة** (الدرس 3)

أستعمل المشتقة لإيجاد القيم العظمى والقيم المحلّية الصغرى لكل من الاقترانات الآتية (إن وجدت):

14) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

15) $f(x) = x^2 + 6x - 3$

16) $f(x) = 1 + 5x - x^2$

17) $f(x) = x^3 + 1.5x^2 - 18x$

18) $f(x) = 18x^2 - x^4$

19) $f(x) = 2x^3 - 6x + 4$

مثال: أستعمل المشتقة لإيجاد القيم العظمى المحلّية والقيم الصغرى المحلّية للاقتران $f(x) = x^3 - 12x + 4$ (إن وجدت).

الخطوة 1 أجد القيم الحرجة؛ أي القيم التي ميل المنحنى عندها صفر.

مشتقة الاقتران $f'(x) = 3x^2 - 12$

بمساواة المشتقة بالصفر $3x^2 - 12 = 0$

بجمع 12 للطرفين $3x^2 = 12$

بقسمة الطرفين على 3 $x^2 = 4$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين $x = \pm 2$

إذن، توجد نقطتان حرجتان لمنحنى الاقتران عندما $x = -2$ وَ $x = 2$؛ لأن مشتقة الاقتران تساوي صفرًا عند هاتين النقطتين.

الخطوة 2 لتحديد أي النقاط الحرجة يوجد عندها قيمة عظمى أو قيمة صغرى للاقتران، أختبر إشارة ميل المنحنى حول كل منهما، وذلك بتعويض بعض القيم القريبة منها.

x	1.9	2	2.1
$f'(x)$	-1.17	0	1.23
إشارةُ الميلِ	سالبةٌ		موجبةٌ

x	-2.1	-2	-1.9
$f'(x)$	1.23	0	-1.17
إشارةُ الميلِ	موجبةٌ		سالبةٌ

تتغير إشارة ميل المنحنى حول $x = -2$ من موجبة إلى سالبة؛ لذا توجد قيمة محلّية عظمى عندما $x = -2$، هي $f(-2) = 20$، وتتغير إشارة ميل المنحني حول $x = 2$ من سالبة إلى موجبة؛ لذا توجد قيمة محلّية صغرى عندما $x = 2$، هي $f(2) = -12$.

حلّ المعادلات بمتغيّر واحد (الدرس 3)

أحلّ كلًّا من المعادلات الآتية:

20 $x^2 + 5x - 24 = 0$

21 $15x^2 - 30x - 120 = 0$

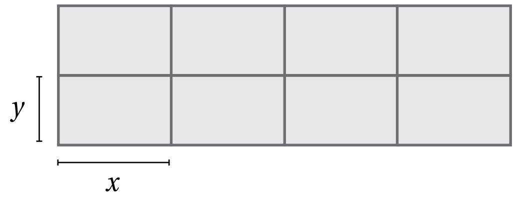
22 $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$

مثال: أحلّ المعادلة $x^3 - 2x^2 - 3x = 0$

المعادلة الأصلية	$x^3 - 2x^2 - 3x = 0$
بإخراج x عاملًا مشتركًا	$x(x^2 - 2x - 3) = 0$
بالتحليل إلى العوامل	$x(x-3)(x+1) = 0$
خاصية الضرب الصفري	$x = 0$ or $x - 3 = 0$ or $x + 1 = 0$
بحلّ المعادلات	$x = 0$ $x = 3$ $x = -1$

تطبيقات القيم القصوى (الدرس 4)

لدى مزارع 180 m من الشّباك، أراد أن يصنع منها حظائر لأغنامه، طول كل منها x مترًا، وعرضها y مترًا كما في الشكل المجاور:



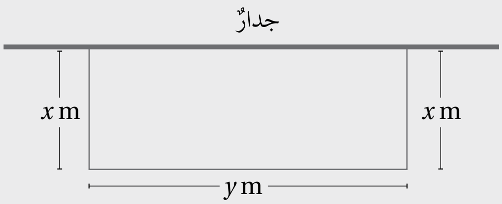
23 أبين أنّ العلاقة بين x وَ y هي $y = 18 - 1.2x$

24 أبين أن الاقتران $A(x) = 144x - 9.6x^2$ يمثل المساحة الكلية للحظائر.

25 أستعمل المشتقة لإيجاد قيمة x التي تجعل المساحة الكلية للحظائر أكبر ما يمكن.

26 أجد أكبر مساحة كلية ممكنة للحظائر.

مثال: جـدار: لدى مزارع 32 m من السـياج، أراد أن يسـيّج به حظيرة مسـتطيلة، طولها y مترًا، وعرضها x مترًا، بجانب جدار يكون أحد أضلاع هذه الحظيرة:



a) أبين أنّ الاقتران $A(x) = x(32-2x)$ يمثل مساحة الحظيرة.

طول السياج 32 m؛ لذا، فإنّ $x + y + x = 32$

إذن، طول الحظيرة $y = 32-2x$، ومساحتها $x(32 - 2x)$ مترًا مربعًا.

b) أجد $A'(x)$.

اقتران المساحة	$A(x) = x(32-2x)$
بتوزيع الضرب على الطرح	$A(x) = 32x-2x^2$
مشتقة اقتران المساحة	$A'(x) = 32-4x$

c) أستعمل المشتقة لإيجاد قيمة x التي تجعل مساحة الحظيرة أكبر ما يمكن.

لإيجاد قيمة x، أحلّ المعادلة $A'(x) = 0$:

بمساواة المشتقة بالصفر	$32 - 4x = 0$
بجمع $4x$ للطرفين	$32 = 4x$
بقسمة الطرفين على 4	$x = 8$

أجد أكبر مساحة ممكنة للحظيرة.

أعوض قيمة $x = 8$ بالاقتران الذي يمثل مساحة الحظيرة.

بتعويض $x = 8$ في $A(x)$	$A(8) = 8(32-2(8))$
بالتبسيط	$= 128$

إذن أكبر مساحة للحظيرة $128\ m^2$، وهي تنتج عندما يكون عرض الحظيرة 8 m، وطولها 16 m

اشتقاق اقتران القوّة

Differentiating a Power Function

أجد $\frac{ds}{dt}$ لكُلّ ممّا يأتي:

1) $s = 10\sqrt{t}$

2) $s = \frac{50}{t} + 10$

3) $s = 10t^2 - \frac{10}{t^2}$

إذا كان $y = \sqrt{x}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

4) إحداثيات النقطة التي تكون عندها مشتقّة الاقتران تساوي $\frac{1}{2}$

5) إحداثيات النقطة التي تكون عندها مشتقّة الاقتران تساوي 1

6) إذا كان الاقتران $y = \frac{(x+a)^2}{x}$ ، حيث a عدد موجب؛ فأجد إحداثيات النقطة التي تكون عندها مشتقّة الاقتران تساوي صفرًا بدلالة a.

إذا كان $f(x) = \frac{2x+5}{x}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

7) مشتقّة الاقتران عند النقطة $(10, 2.5)$

8) إحداثيات النقاط التي تكون عندها مشتقّة الاقتران تساوي -5

9) إذا كان الاقتران $f(x) = \frac{100}{x}$، وكانت P نقطة تقع على منحنى الاقتران إحداثياتها $(a, \frac{100}{a})$؛ فأجد مساحة المثلّث المكوّن من مماس منحنى الاقتران عند النقطة P والمحورين الإحداثيّين.

الدرس 2

قاعدة السلسلة

The Chain Rule

أجد مشتقّة كُلّ اقتران ممّا يأتي:

1) $y = (1-x+x^2-x^3)^4$

2) $y = (x+x^2)^{\frac{3}{2}}$

3) $y = \dfrac{\sqrt{5+4x^2}}{2}$

4) إذا كان $y = \sqrt{1+\sqrt{3x+4}}$؛ فأجد مشتقّة الاقتران y عندما $x = 0$

5) إذا كان الاقتران $y = (2x-3)^3$؛ فأجد إحداثيات النقطة (النقاط) التي يكون عندها ميل المماسّ يساوي 24

6) إذا كان الاقتران $y = f(x^2+3x-5)$؛ فأجد $\dfrac{dy}{dx}$ عند $x = 1$ علمًا بأنّ $f'(-1) = 2$

7) أجد معادلة المماسّ للاقتران $y = (x^3-7)^5$، عندما $x = 2$

8) إذا كان الاقتران $y = \sqrt{x+9}$، وكان مماسّ الاقتران عند النقطة $P(16, 5)$ يقطع المحور x عند النقطة A، والعمودي على المماسّ عند النقطة P يقطع المحور x عند النقطة B؛ فأجد طول $\overline{AB}$.

9) يزداد نصف قطر دائرة بمعدل $0.3\ cm/s$. أجد معدل زيادة مساحة الدائرة عندما يكون نصف القطر $5\ cm$

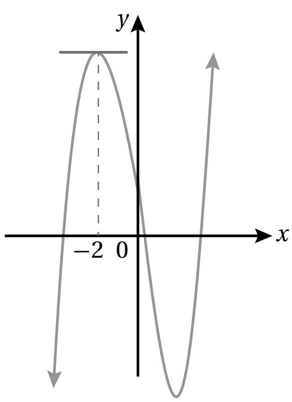
10) إذا كان حجم الكرة يُعطى بالعلاقة $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$، وكانت مساحة سطح الكرة تُعطى بالعلاقة $A = 4\pi r^2$؛ فأجد $\dfrac{dV}{dA}$ بدلالة المتغيّر r.

القِيَم العظمى والصغرى لكثيرات الحدود

Maximum and Minimum Values of Polynomials

1. إذا كان الاقتران $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x$؛ فأجد الفترات التي يكون فيها الاقتران f متزايدًا.

2. يُمثّل الشكل المجاور منحنى الاقتران $y = x^3 + kx^2 - 8x + 3$. إذا كان مماسّ الاقتران عند النقطة $x = -2$ موازيًّا للمحور x؛ فأجد قيمة الثابت k.



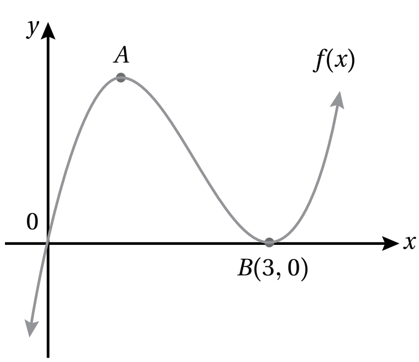
إذا كان الاقتران $f(x) = (x-1)^2\,(x + 2)$؛ فأجيب عمّا يأتي:

3. أجد إحداثيَي النقطتين اللتين يقطع عندهما منحنى الاقتران المحور x.

4. أجد النقاط الحرجة للاقتران، ثم أُحدّد نوعها.

5. أُمثّل الاقتران بيانيًّا.

يمُثّل الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$، وتُمثّل A نقطة عظمى محلّية للاقتران f، و B نقطة صغرى محلّية.



6. أجد إحداثيات النقطة A.

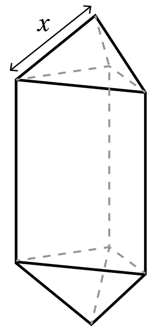
7. أُمثّل الاقتران $g(x)$ حيث: $g(x) = f(x + 2) + 4$

إذا كان الاقتران $s(t) = 1.2 + 19.6t - 4.9t^2$ يُمثّل موقع كرة بالنسبة إلى سطح الأرض كرة (بالمتر)، بعد t ثانية من رميها رأسيًّا لأعلى؛ فأجيب عمّا يأتي:

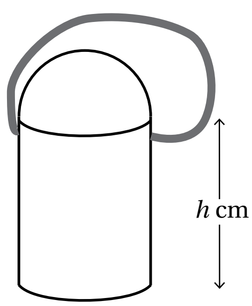
8. أجد سرعة الكرة بعد ثانية واحدة من بدء حركتها.

9. كم ثانية تستمر الكرة في الصعود إلى الأعلى؟

تطبيقات عملية على الاشتقاق
Applications of Differentiation



1 شكّل صائغ قطعة ذهبية يُزيّن بها قلادة على شكل منشور ثلاثي، وعلى كلّ طرف منها هرم ثلاثي منتظم طول ضلعه x كما في الشكل المجاور. إذا كان الاقتران $A(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(x^2 + \frac{16}{x}\right)$ يُمثّل المساحة الكلّية لسطح القطعة؛ فأجد قيمة x التي تجعل كمّية الذهب اللازمة لتغطيتها أقلّ ما يمكن.

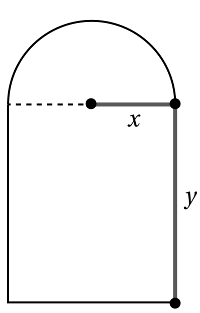


حافظة ماء للأطفال على شكل أسطوانة يعلوها نصف كرة. إذا كان طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة r cm وارتفاعها h cm، وحجمها 400 cm^3؛ فأجيب عمّا يأتي:

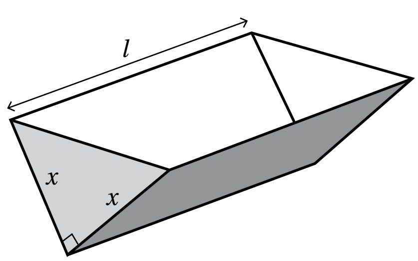
2 أجد الاقتران الذي يُمثّل مساحة السطح الكلّية للحافظة.

3 أجد قيمة r التي تكون عندها مساحة السطح الكلية للحافظة أقلّ ما يُمكن.

4 حدّدت إحدى شركات تصنيع الملابس سعر بيع البدلة الرجالية الواحدة (بالدينار) بالاقتران $s(x) = 150 - 0.5x$، حيث x عدد البدلات المبيعة. فإذا كانت تكلفة إنتاج x من البدلات تُعطى بالاقتران $C(x) = 4000 + 0.25x^2$؛ فأجد عدد البدلات التي يجب على الشركة إنتاجها وبيعها للحصول على أكبر ربح ممكن.



5 نافذة على شكل مستطيل يعلوه نصف دائرة، محيطها 8 m كما في الشكل المجاور. أجد قيمتَي x و y اللازمتين لمرور أكبر كمية من الضوء خلال النافذة.



6 خزّان ماء على شكل منشور ثلاثي سعته 108 L وطوله l m، والمقطع الجانبي للخزان على شكل مثلّث قائم الزاوية ومتساوي الساقين كما في الشكل المجاور. يُراد دهن الخزان بمادّة عازلة من الداخل تحميه من التآكل. أجد قيمة x التي تجعل مساحة السطح الداخلية أصغر ما يمكن.

أختبرُ معلوماتي قبل البدء بدراسة الوحدة، وفي حال عدم تأكّدي من الإجابة أستعينُ بالمثال المُعطى.

تبسيط المقادير الأُسّية (الدرس 1)

أجد ناتج كُلّ ممّا يأتي بأبسط صورة:

1) $(-27)^{\frac{2}{3}}$ 2) $\sqrt[5]{32t^{15}}$ 3) $\frac{15h^5 g^2}{3h^2 g}$

مثال: أجد ناتج كُلّ ممّا يأتي بأبسط صورة:

a) $\mathbf{(81)^{-\frac{5}{4}}}$

$(81)^{-\frac{5}{4}} = (\sqrt[4]{81})^{-5}$ الصورة الأُسّية للجذر

$= (3)^{-5}$ $\sqrt[4]{81} = 3$

$= \frac{1}{(3)^5}$ تعريف الأُس السالب

$= \frac{1}{243}$ بالتبسيط

b) $\mathbf{\sqrt[3]{125x^6y^3}}$

$\sqrt[3]{125x^6y^3} = \sqrt[3]{125}\ \sqrt[3]{x^6}\ \sqrt[3]{y^3}$ خصائص الجذور

$= \sqrt[3]{125}\ (x)^{\frac{6}{3}}\ (y)^{\frac{3}{3}}$ الصورة الأُسّية للجذر

$= 5x^2y$ بالتبسيط

حلّ المعادلات الأُسّية (الدرس 1)

أحلّ كلًّا من المعادلات الأُسّية الآتية:

4) $2^{x-1} = 16$ 5) $(\frac{1}{2})^x = 2^8$ 6) $(\frac{1}{8})^{-y} = \frac{1}{512}$

7) $4^{x-5} = 32^{2x+1}$ 8) $9^x = 3 \times (\frac{1}{3})^x$ 9) $625^{2x+1} = \frac{5}{\sqrt{5}}$

مثال: أحلّ المعادلة الأُسّية $\mathbf{3 \times 9^x = 243}$

$3 \times 9^x = 243$ المعادلة الأصلية

$3 \times 3^{2x} = 3^5$ $9 = 3^2 , 243 = 3^5$

$3^{2x+1} = 3^5$ بضرب القوى

$2x + 1 = 5$ بمساواة الأُسس

$x = 2$ بحلّ المعادلة الخطّية الناتجة

إيجاد الاقتران العكسي (الدرس 2)

أجد الاقتران العكسي لكُلٍّ من الاقترانات الآتية:

10) $f(x) = x + 3$

11) $f(x) = \frac{x}{4} + 1$

12) $f(x) = 2x^3$

مثال: أجد الاقتران العكسي للاقتران $f(x) = 3x^2 - 5,\ x \geq 0$

باستعمال اختبار الخطّ الأُفقي، أجد أنّ $f(x)$ هو اقتران واحد لواحد عندما $x \geq 0$؛ لذا، فإنّ له اقترانًا عكسيًّا.

الخطوةُ 1 أكتبُ الاقتران بصورة $y = 3x^2 - 5$

الخطوةُ 2 أُعيد ترتيب المعادلة الناتجة في الخطوة 1 بجعل x موضوع القانون:

المعادلة الأصلية $y = 3x^2 - 5$

بإضافة 5 إلى طرفَي المعادلة $y + 5 = 3x^2$

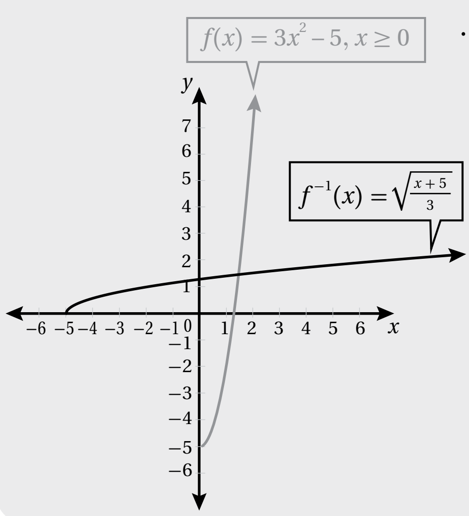
بقسمة طرفَي المعادلة على 3 $\frac{y+5}{3} = x^2$

بأخذ الجذر التربيعي الموجب للطرفين؛ لأنّ مجال f الذي يُمثّل مدى f^{-1} هو الأعداد غير السالبة. $\sqrt{\frac{y+5}{3}} = x$

الخطوةُ 3 أُبدّل x بـ y، وأُبدّل y بـ x، فينتج: $y = \sqrt{\frac{x+5}{3}}$.

الخطوةُ 4 أكتبُ $f^{-1}(x)$ مكان y، فينتج: $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x+5}{3}}$.

عند تمثيل كُلٍّ من $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ في المستوى الإحداثي نفسه، أُلاحظ أنّ التمثيل البياني للاقتران $f^{-1}(x)$ هو انعكاس للتمثيل البياني للاقتران $f(x)$ حول المستقيم $y = x$.



الاقترانات الأُسّية
Exponential Functions

أُمثّل كلًّا من الاقترانات الآتية بيانيًّا وأجد مجاله ومداه:

1) $y = (\frac{1}{5})^{-x}$

2) $y = 2^{-2x} + 1$

3) $y = e^{2x-3}$

4) $y = (\frac{1}{3})^{2x+1} - 5$

5) $y = 4e^{x-1} + 2$

6) $y = 2^{x-2} - 3$

يمرّ منحنى الاقتران $y = k(4^x) + c$ بالنقطتين $(0, 3)$ و $(-2, -\frac{3}{4})$

7) أجد قيمة كُلّ من k و c

8) أجد قيمة y عندما $x = 2$

طب: يُمكن نمذجة المساحة A لجرح في جسم إنسان طبيعي بعد n يومًا من حدوث الجرح بالاقتران $A(n) = A_0\, e^{-0.35n}$ حيث A_0 مساحة الجرح لحظة حدوثه.

9) إذا كانت مساحة جرح لحظة حدوثه $100\ \text{mm}^2$ فأجد مساحة الجرح بعد 10 أيام.

10) أُمثّل الاقتران $A(n)$ بيانيًّا.

11) أجد المقطع y لمنحنى الاقتران، وأصف مدلوله.

12) **علم الاجتماع:** يستعمل خبراء علم الاجتماع المعادلة $N = P(1-e^{-0.15d})$ لتقدير عدد الأشخاص N الذين سمعوا شائعة انتشرت في مجتمع عدد أفراده P نسمة بعد d يوم من انطلاقها. أُقدّر عدد الأشخاص الذين سمعوا الشائعة بعد 4 أيام من انطلاقها في مجتمع عدد أفراده 5000 نسمة.

الاقترانات اللوغاريتمية

Logarithmic Functions

أكتبُ كُلّ معادلة لوغريتمية ممّا يأتي على الصورة الأُسّية:

1. $\log_4(256) = 4$
2. $\log_5\left(\frac{1}{25}\right) = -2$
3. $\log_6\left(\frac{1}{\sqrt[5]{36}}\right) = \frac{-2}{5}$

أكتبُ كُلّ معادلة أُسّية ممّا يأتي على الصورة اللوغريتمية:

4. $3^5 = 243$
5. $6^{-2} = \frac{1}{36}$
6. $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \frac{25}{4}$

أجد قيمة كُلّ ممّا يأتي؛ من دون استعمال الآلة الحاسبة:

7. $\log_2(128)$
8. $\log_2(\sqrt{512})$
9. $\log(0.001)$
10. $\log_{\frac{1}{2}} 2$
11. $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e^7}}\right)$
12. $10^{\log 14}$

أُمثّل كُلًّا من الاقترانات الآتية، وأُحدّد مجاله ومداه ومقطعيه الإحداثيّين وخطوط تقاربه، وإن كان متزايدًا أم متناقصًا:

13. $y = \log(2x)$
14. $y = \log(5 - x)$
15. $\log_3(x + 2)$

أُمثّل كُلًّا من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

16. $f(x) = \log(2x + 3) + 7$
17. $g(x) = 2 + \ln(3x - 5)$

18. **ضوء:** تُمثّل المعادلة $\log\left(\frac{I}{12}\right) = -0.0125x$ العلاقة بين شدّة الضوء I بوحدة (lumen) والعمق x بالأمتار في إحدى البحيرات. ما مقدار شدّة الضوء عند عمق 10 m؟

قوانين اللوغاريتمات
Laws of Logarithms

أجد قيمة كُلّ ممّا يأتي:

1. $\log\sqrt{5} + \log\sqrt{2}$
2. $\log_9\sqrt{3} \times \log_3\sqrt{5} \times \log_5\sqrt{81}$
3. $\dfrac{\log_5 2 + \log_5 4}{\log_5 4 + \log_5 16}$

إذا كان $\log 5 \approx 0.699$ و $\log 9 \approx 0.9542$؛ فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

4. $\frac{1}{3}\log 2$
5. $\log 0.5$
6. $\log 0.2$
7. $\log\sqrt[5]{45}$

أُبيّن أنّ المعادلة $A = 100 - 50\log(t+1)$ يُمكنني كتابتها على الصورة المعطاة في كُلّ ممّا يأتي:

8. $\log(t+1) = \dfrac{100-A}{50}$
9. $t = 10^{\frac{100-A}{50}} - 1$

أحلّ المعادلات الأُسّية الآتية، مقرّبًا إجابتي إلى أقرب 4 منازل عشرية:

10. $9^x - 28(3^x) + 27 = 0$
11. $4^{x^3+2x^2-3x} = 1$
12. $4e^{2x} + 8e^x - 5 = 0$
13. $e^{2x} - 6e^x + 8 = 0$

أحلّ المعادلات اللوغاريتمية الآتية:

14. $\log_x(216) = 3$
15. $\log_x(4) = \frac{1}{2}$
16. $\log_x(27) = 1.5$
17. $\log_{x-1}(1024) = 5$
18. $\log_2(x^2-4) = \log_2(3x)$
19. $\log_3(x^2-15) = \log_3(2x)$

20. **زلازل:** تُستعمل المعادلة $P = \log_{\frac{2}{3}} \dfrac{E}{11.81}$ لنمذجة العلاقة بين قوة الزلزال P على مقياس ريختر والطاقة E الناتجة عنه بوحدة الجول. أحسبُ الطاقة الناتجة عن زلزال قوته 8.1 درجة على مقياس ريختر.